Данная серия методичек посвящается
лучшему семинаристу по квантовой теории
Андрею Владимировичу Толоконникову

А.В.: Не думали об этом? Ну ладно. На третьем курсе вам полагается не задумываться!

2,5. Типовая ошибка

Которую мы сейчас разберём. Она заключается в том, что считая <x>, или Dispx (любое из средних) от подобных состояний

$$|\Psi> = \frac{3i}{\sqrt{10}}|5> - \frac{1}{\sqrt{10}}|6>$$

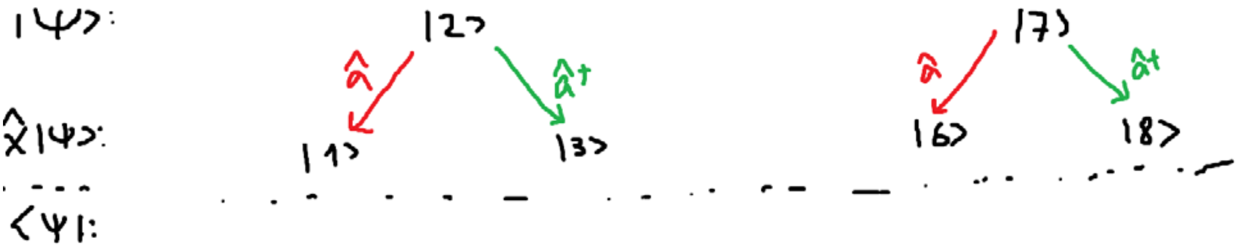
Студенты разбивают ВФ на СФ гамильтониана, считают среднее от каждой, а затем складывают:

$$< \hat{A} > \text{от } |\Psi> \quad \text{равно ли } < \hat{A} > \text{от } \frac{3i}{\sqrt{10}}|5> + < \hat{A} > \text{от } \frac{1}{\sqrt{10}}|6>?$$

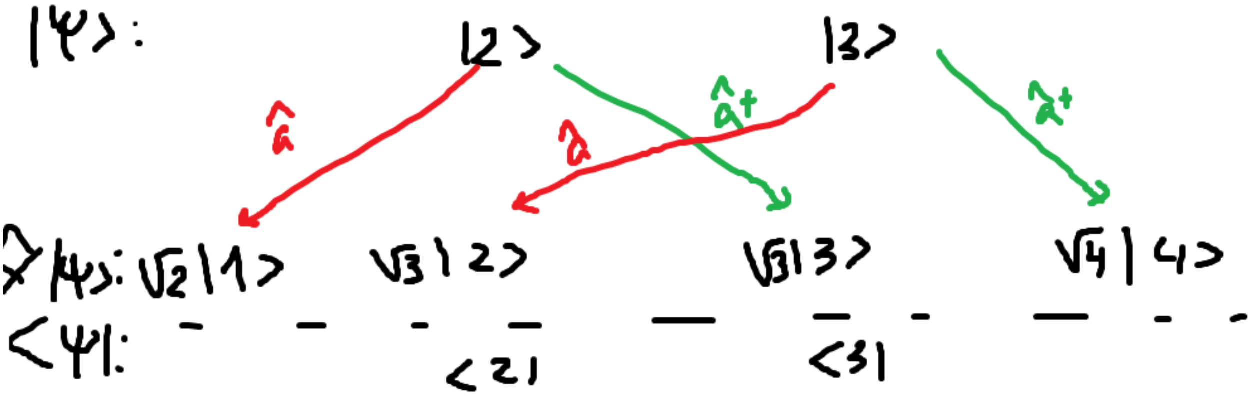
Иногда действительно равно – в том случае, если СФ расположены достаточно далеко от друга, например, для ВФ

$$|\Psi> = \frac{3i}{\sqrt{10}}|2> - \frac{1}{\sqrt{10}}|7>$$

Нарисуем картинку:

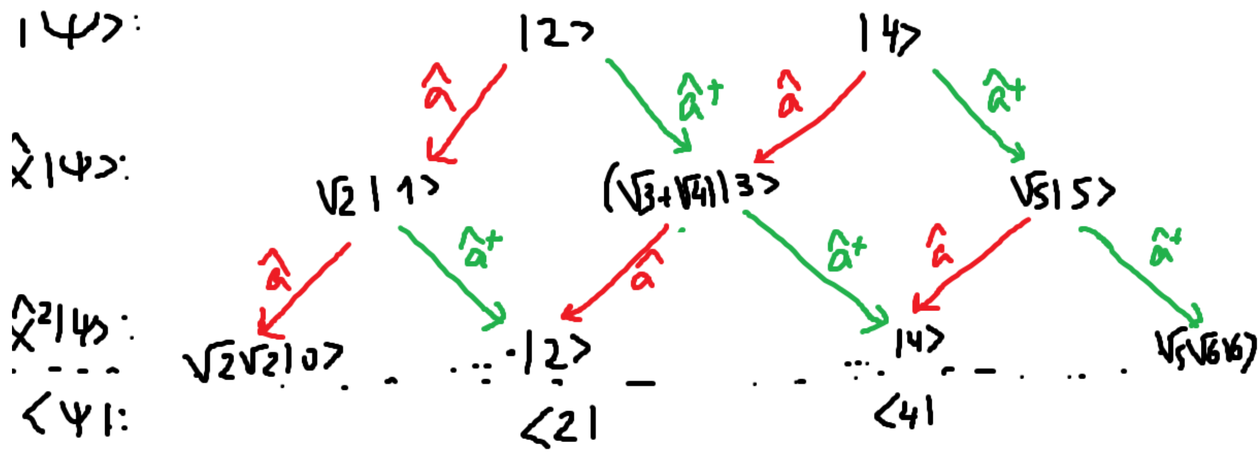


Как видите, они «не перекрываются». Тогда средние можно складывать.
А вот вам пример с перекрытием:
А вот пример с перекрытием:

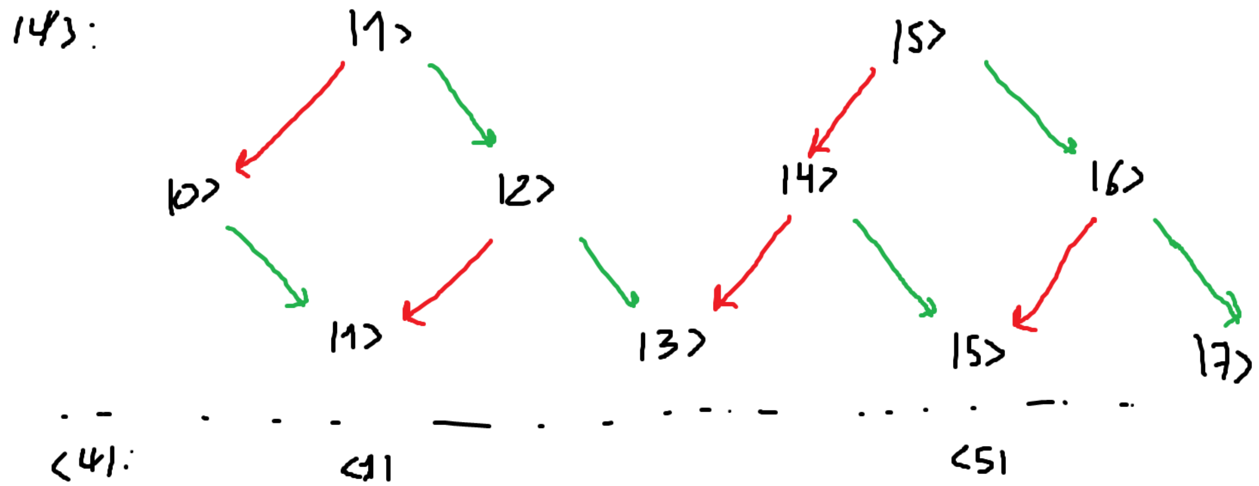


А тут уже есть перекрытие, и среднее значение абсциссы оказывается не 0, а $2\sqrt{3}$ (в нулевой момент времени, в произвольный ещё надо экспоненты считать).
В задаче 2 у нас тоже перекрытие было, кстати.

А вот вам пример с перекрытием, уже для дисперсии:



Как мы видим, тут уже есть «перекрытие», а значит, просто складывать средние уже нельзя, нужно считать честно.
Бывает, что перекрытие есть, но в среднее оно вклад не вносит и можно считать, что его нет:



(я забил на коэфы)
Есть перекрытие в |3>, но т.к. бра <3| нет, оно свой вклад не вносит.
Резюме: чтобы было перекрытие для <x> и <p>, требуется наличие в ВФ двух соседних ненулевых СФ;
чтобы было перекрытие для $<x^2>$ и $<p^2>$, требуется наличие в ВФ двух ненулевых СФ, различающихся на 2.
Если перекрытия нет, средние можно смело складывать.

Упражнение читателю. Для ВФ:

$$|\Psi> = \frac{3i}{\sqrt{14}}|1> + \frac{2}{\sqrt{14}}|7> - \frac{1}{\sqrt{14}}|9>$$

Можем ли мы подсчитать средние абсциссы и дисперсии для каждой СФ, а потом сложить?
Ответ: координаты – да, дисперсии уже нет, т.к. |7> и |9> на расстоянии 2.

3. Состояния – СФ операторов рождения и уничтожения

Мы работаем с СФ гамильтониана. Но у операторов рождения и уничтожения тоже есть СФ. Силаев их традиционно обозначает греческими буквами: $|\gamma >$. ***Не путать с СФ гамильтониана*** $|n >$***, где буквы латинские, а цифры арабские!***

Найдём их, написав уравнение на поиск СЗ оператора уничтожения:
$\hat{a}|\gamma >= \lambda * |\gamma >$
Где λ – собственное значение.
Ищем $|\gamma >$ в виде разложения по СФ гамильтониана:

$$|\gamma >= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n >$$

Подставим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \sqrt{n} |n-1> = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n >$$

Сместим индекс в левой сумме:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1} \sqrt{n+1} |n> = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n >$$

Откуда получаем, что для любого n

$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = \lambda c_n$$

Откуда

$$c_{n+1} = \frac{c_n}{\lambda\sqrt{n+1}}$$

Это рекурсивная формула. Тогда

$$c_n = \frac{c_0}{\lambda^n \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k}}$$

Итоговая формула для $|\gamma >$:

$$|\gamma >= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{c_0}{\lambda^n \prod_{k=1}^{n} \sqrt{k}} |n >$$

Где λ – собственное значение.

Это мы нашли СФ оператора уничтожения. СФ оператора рождения ищутся аналогично:
Ищем $|\gamma >$ в виде разложения по СФ гамильтониана:

$$|\gamma >= \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n >$$

Подставим:

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n \sqrt{n+1} |n+1> = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} c_n |n >$$

Сместим индекс в левой сумме:

$$\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}\sqrt{n}|n> = \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} c_n|n>$$
Откуда получаем, что для любого n, кроме 0
$$c_{n-1}\sqrt{n} = \lambda c_n$$
А $c_0 = 0$.
Откуда все с-шки равны 0. Значит, у оператора рождения СФ нет. Они есть только у оператора уничтожения.

Когерентные состояния

Есть состояния – СФ гамильтониана, они обозначаются $|n>$ или как $|\varphi_n>$
Есть состояния – СФ оператора унижения, они обозначаются как $|\gamma>$.
А есть третий тип состояний – когерентные состояния. Как сказал Толоконников, это такой мостик между классикой и квантами.
У нас в классике как?
$$x(t) = x_0 cos\omega t$$
$$p(t) = p_0 sin\omega t$$
В квантах когерентные состояния – такие, что
$$<x>(t) = x_0 cos\omega t$$
$$<p>(t) = p_0 sin\omega t$$
Т.е. квантовый осциллятор ведёт себя так же, как классический. Поэтому и «мостик между классикой и квантами».
Одним из когерентных состояний было состояние из задачи 1:
$$|\Psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|0> + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|1>$$
У него как раз оказалось, что
$$<x>(t) = x_0 cos\omega t$$
$$<p>(t) = p_0 sin\omega t$$
Как считаете, можно ли обобщить: сказать, что когерентным будет любое состояние
$$|\Psi> = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|n-1> + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|n>$$
Проверяем:
$$\Psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\exp\left(i\omega\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{t}\right) * \varphi_{\mathrm{n}-1} + \exp\left(i\omega\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{t}\right) * \varphi_{\mathrm{n}}\right)$$

$$\hat{x}\Psi(t) = \frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{n}\exp\left(i\omega\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{t}\right) * \varphi_{\mathrm{n}-1} + \sqrt{n}\,\exp\left(i\omega\left(\mathrm{n}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{t}\right) * \varphi_{\mathrm{n}}\right)$$

$$<x>(t) = \frac{x_0^2}{2}\sqrt{n}(exp(i\omega t) + exp(-i\omega t)) = \sqrt{n}\frac{x_0^2}{2}cos\omega t$$
(аналогично проверяется импульс)
Почти когерентное, со множителем $\sqrt{n}$.

А как нам получить все когерентные состояния? Ой, это долгий счёт. Приведу начало и ход рассуждений. До конца не довёл:

$$|\Psi>(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)|n>$$

$$\hat{x}|\Psi>(t)=\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)*\hat{x}|n>$$

Подставляем $\hat{x}=\sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\left(\hat{a}^{+}+\hat{a}\right)=\frac{x_0}{\sqrt{2}}\left(\hat{a}^{+}+\hat{a}\right)$:

$$\hat{x}|\Psi>(t)=\frac{x_0}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)*(\widehat{a^{+}}+\hat{a})|n>$$

Действуем операторами рождения и уничтожения на $|n>$:

$$\hat{x}|\Psi>(t)=\frac{x_0}{\sqrt{2}}\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)*(\sqrt{n}\left|n-1>+\sqrt{n+1}\right|n+1>)$$

Разобьём на две суммы:

$$\hat{x}|\Psi>(t)=\frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)*\sqrt{n}|n-1>\ +\sum_{n=0}^{+\infty}c_n(t)*\sqrt{n+1}|n+1>)$$

В каждой из сумм сместим индекс:

$$\hat{x}|\Psi>(t)=\frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}(t)*\sqrt{n+1}|n>\ +\sum_{n=1}^{+\infty}c_{n-1}(t)*\sqrt{n}|n>)$$

И теперь скалярно умножим на $<\Psi|$. Т.е.

$$<x>(t)=\frac{x_0}{\sqrt{2}}(\sum_{n=0}^{+\infty}c_{n+1}(t)*c_n^*(t)\sqrt{n+1}\ +\sum_{n=1}^{+\infty}c_{n-1}(t)*\sqrt{n}\ *c_n^*(t)$$

По условию

$$<x>(t)=x_0cos\omega t$$

Поэтому

$$cos\omega t=\frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{n=0}^{+\infty}\sqrt{n+1}c_{n+1}(t)c_n^*(t)\ +\sum_{n=1}^{+\infty}\sqrt{n}c_{n-1}(t)c_n^*(t)$$

Распишем:

$c_{n+1}(t)c_n^*(t)=c_{n+1}(0)c_n(0)\ \exp\left(i\omega\left(\mathrm{n}+\frac{3}{2}\right)\mathrm{t}\right)*\exp\left(-i\omega\left(\mathrm{n}+\frac{1}{2}\right)\mathrm{t}\right)=$
$c_{n+1}(0)c_n(0)\exp(i\omega t)$

Аналогично

$$c_{n-1}(t)c_n^*(t)=c_{n-1}(0)c_n(0)\exp(-i\omega t)$$

$$cos\omega t = \frac{1}{\sqrt{2}}(\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(0)c_n(0)\sqrt{n+1}\exp(i\omega t)$$
$$+\sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}(0)c_n(0)\sqrt{n}\ \exp(-i\omega t)$$

Начинаем подгонять под известное тождество:

$$cos\omega t = \frac{\exp(i\omega t) + \exp(-i\omega t)}{2}$$

Получаем, что

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(0)c_n(0)\sqrt{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}(0)c_n(0)\sqrt{n}\ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_{n+1}(0)c_n(0)\sqrt{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} c_{n-1}(0)c_n(0)\sqrt{n}\ = \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$c_{n+1}\sqrt{n+1} = c_{n-1}\sqrt{n}$$

И вот если мы решим эту рекуррентную последовательность, то усё, дело в шляпе.

5. Эффект Мёссбауэра

О нём рассказывает, кажется, только Парфёнов. На зачёте его нет, просто из серии «интересно знать».

Представим себе кристалл. Вот в нём находится ядро, оно возбуждено. Оно снимает возбуждение, испуская гамма-квант. Рядом находится другое ядро, которое гамма-квант поглощает, которое, наоборот, становится возбуждённым.

Однако такой эффект невозможен: первое ядро передаст гамма-кванту не всю энергию: по ЗСИ оно должно само по себе приобрести импульс отдачи. В результате у гамма-кванта будет не вся энергия, которой не хватит для возбуждения соседнего атома. (Прям как Почта России – она доставляет, но не всё, частично).

(Этой проблемы нет для переходов в ***атоме***, где разность энергетический уровней гораздо выше и на их фоне характерные энергии фотонов плёвые).

Выход был найден Мёссбауэром – нужно заморозить кристалл до того, когда ядра перестанут колебаться и станут находится в состоянии |0> с энергией hω/2. Тогда ядро не может приобрести произвольную энергию отдачи (она квантуется), и на следующую (3hω/2) ему может просто не хватить. В результате оно испускает фотон, и вместо того, чтобы ринуться назад (импульс отдача), дёргает назад весь кристалл. Тогда импульс получается равный импульсу фотона (ЗСИ), а вот энергия крохотная, и можно считать, что вся энергия пошла в фотон.

Это моё объяснение на пальцах, а количественно посмотрите Парфёнова https://www.youtube.com/watch?v=X1JdqOneixw&list=PLcsjsqLLSfNDT6Ju9CXpGFCgQi6q6evmM&index=6 с 41:00.